

Экзамен по курсу "Введение в численные методы", 3 семестр

40-30
33-33

1. Интерполирование полиномами.

3.1.1-3.1.4
72-80
133-34

Интерполяционная формула Лагранжа.

I. Постановка задачи интерполирования (3.1.1)

На отрезке $[a, b]$ выберем $n+1$ функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ и будем искать л.п.
 $F(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$, где c_i определяются из условий $F(x_j) = f(x_j), j = \overline{0, n}$. Система СЛАУ
относительно c_i : $\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x_j) = f(x_j), j = \overline{0, n}$. $\{c_i\} \exists! \Leftrightarrow \Delta = \det \{\varphi_i(x_j)\} \neq 0$.

Def. Система ф-ций $\varphi_i(x), i = \overline{0, n}$, задан. на фикс. значениях $x_j, j = \overline{0, n}$, удовлетв.
 $\Delta = \det \{\varphi_i(x_j)\} \neq 0$, называется теблицевской. В ней также будем
использовать также такие сис. функций.

Необходимое условие теблицевскости — линейная независимость (но не обратное).

II. Интерполирование полиномами. (3.1.2)

Примем $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_n(x) = x^n$. Тогда $F(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$.

Сист. СЛАУ: $\sum_{i=0}^n c_i x_j^i = f(x_j), j = \overline{0, n}$. Ее сф.-м — сф.-м Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j). \text{ Все узлы интерполирования фиксированы } \Rightarrow \Delta \neq 0.$$

III. Построение интерполяционного полинома в форме Лагранжа. (3.1.3)

Решить СЛАУ можно. Будем искать интерпол. полином др. способом.

Представим искомый $P_n(x)$ в виде $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) Q_{n,i}(x)$, где $Q_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_n)}$. $Q_{n,i}(x_j) = \delta_{ij}$. Легко заметить, что такой $P_n(x)$ действительно является интерпол. полиномом — он называется интерполяционным полиномом в форме Лагранжа.

IV. Интерполяционный полином в форме Ньютона. (3.1.4)

У.н. в ф. Лагранжа удобен тем, что при увеличении числа узлов весь полином приходится переисчислять заново. Перепишем $P_n(x)$ в эквив. форме: $P_n(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^n (P_i(x) - P_{i-1}(x))$, где $P_i(x)$ соотв. узлам $x_0, x_1, \dots, x_i$. $Q_i(x) = P_i(x) - P_{i-1}(x)$ имеет степень i и обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \dots, x_{i-1} \Rightarrow Q_i(x) = A_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})$. P_{i-1} не содержит $x^i \Rightarrow$

$\Rightarrow A_i$ — коэффициенты при x^i в $P_i(x)$. Согласно Лейбниису в ф. Лорана,
 $A_i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_i)}$, $A_0 = f(x_0)$. Тогда $P_n(x) = P_{n-1}(x) + A_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$.
 Выразив аналогичным образом $P_{n-1}(x)$ через $P_{n-2}(x)$ и т.д., получаем, что
 $P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + A_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$. Видно, что
 в этой форме выражение и на единицу требует всего лишь добавление одного слагаемого.

3.15-3.16
 с. 80-85
 114-15

2. Погрешность интерполяционного полинома.

I. Погрешность интерполирования. (3.1.5)

Насколько хорошо $P_n(x)$ приближает $f(x)$ на $[a, b]$? Определим погрешность (остат. член) $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, $x \in [a, b]$. Допустим, что $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$.
 $R_n(x_i) = 0 \Rightarrow R_n(x) = \omega_{n+1}(x) z_n(x)$, где $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n)$. Зафиксируем точку $x \in [a, b]$
 и рассмотрим $g(t) = f(t) - P_n(t) - \omega_{n+1}(t) z_n(x)$. $g(t)$ обращается в нуль при $t = x_i$
 и при $t = x \Rightarrow$ она имеет $n+2$ нулей. Эти нули принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$,
 где $\alpha = \min(x_0, x) \geq a$, $\beta = \max(x_n, x) \leq b$. Согласно т. Роуле, $g'(t)$ имеет
 по крайней мере $n+1$ нуль на $[\alpha, \beta]$, $g''(t)$ — n нулей, ..., $g^{(n+1)}(t)$ — один нуль:
 $g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! z_n(x) = 0$ для некоего $\xi \in [\alpha, \beta]$. $P_n^{(n+1)} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow z_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, $\xi \in [\alpha, \beta] \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$,
 где $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

На $[x_0, x_n]$ $|\omega_{n+1}(x)|$ невелико, однако за пределами этого отрезка $|\omega_{n+1}(x)|$ быстро растет.

II. О сходимости интерполяционного процесса. (3.1.6) — с. 84-85, на лекции не было

3.1.7
 с. 85-92
 116

3. Интерполирование с кратными узлами. Полином Эрмита.

I. Интерполяционный полином Эрмита. (3.1.7)

Расширим постановку задачи об интерполяции: пусть $x_k \in [a, b]$, $k = \overline{0, m}$,
 теперь заданы не только $f(x_k)$, но и $f^{(i)}(x_k)$, $i = \overline{1, N_k-1}$. N_k — кратность узла x_k .
 На всех узлах известно $N_0 + \dots + N_m$ величин $\Rightarrow$ будем искать полином $H_n(x)$ степени
 $n = N_0 + \dots + N_m - 1$, удовлетворяющий $H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k)$, $k = \overline{0, m}$, $i = \overline{0, N_k-1}$. Такой полином
 называется интерполяционным полиномом Эрмита для функции $f(x)$.

Докажем, что $H_n(x) \exists!$. Предположим, что в стандартной форме $H_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.
 Нужно доказать, что $\{a_i\} \exists!$. Условие на $H_n(x)$ — СЛАУ от $a_0, \dots, a_n$ с $n+1$ уравнением и $n+1$ неизвестным. Рассмотрим сист. дифф. уравн: $H_n^{(i)}(x_k) = 0, k = \overline{0, m}, i = \overline{0, N_k-1}$.
 Из уравнения следует, что x_k — корни $H_n(x)$ кратности $N_k \Rightarrow H_n(x)$ имеет, с учетом кратности, не менее $n+1$ корней $\Rightarrow H_n(x) \equiv 0$ и $\bar{a}_0 = \bar{a}_1 = \dots = \bar{a}_n = 0 \Rightarrow \{a_i\} \exists!$. $\square$

Исследование непрерывности полагая основно повторяет предыдущий анализ.

Получаем, что $|R_n(x)| = |f(x) - H_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$, где $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)^{N_0} \dots (x-x_m)^{N_m}$.

Примеры 1 и 2 см. на с. 88-90 — на лекции не было.

$$f(x_k) = f_k, k = \overline{0, m}, f'(x_j) = x_j \Rightarrow H_{m+1}(x) = \sum_{k=0}^m f_k \frac{(x-x_0)^{N_0} \dots (x-x_m)^{N_m}}{(x_k-x_0)^{N_0} \dots (x_k-x_m)^{N_m}} \cdot \frac{x-x_j}{x_k-x_j} + (f_j + d_j(x-x_j)) \frac{(x-x_0)^{N_0} \dots (x-x_m)^{N_m}}{(x_j-x_0)^{N_0} \dots (x_j-x_m)^{N_m}}$$

3.2
2.92-99
11.12.20

4. Интерполирование сплайнами.

I. Определение кубического сплайна. (3.2.1) $H_{2m+1} = \sum_{k=0}^m (f_k + d_k(x-x_k)) \frac{(x-x_0)^{N_0} \dots (x-x_m)^{N_m}}{(x_k-x_0)^{N_0} \dots (x_k-x_m)^{N_m}}$

Пусть на $[a, b]$ задана ф-ция $y = f(x)$. Рассм. узлы $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$; $h_i := x_i - x_{i-1}$.

Def. Кубическим сплайном ф-ции $y = f(x), x \in [a, b]$ на сетке $x_0, \dots, x_n$ назовем ф-цию $S(x)$,

удовл. условиям: 1) на $\forall [x_{i-1}, x_i]$ $S(x)$ — полином 3-й степени; 2) $S(x), S'(x), S''(x) \in C[a, b]$;

3) $S(x_i) = f(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}$; 4) $S''(a) = S''(b) = 0$.

Теорема. Кубический сплайн $S(x) \exists!$. Доказательство будет употреблено конструктивно.

II. Переформулировка системы уравнений для коэффициентов кубического сплайна. (3.2.2)

Составим на промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ полином $S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + \frac{c_i}{2}(x-x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x-x_i)^3$, $x \in [x_{i-1}, x_i], i = \overline{1, n}$. Предполож., $S_i'(x) = b_i + c_i(x-x_i) + \frac{d_i}{2}(x-x_i)^2, S_i''(x) = c_i + d_i(x-x_i),$

$S_i(x_i) = a_i, S_i'(x_i) = b_i, S_i''(x_i) = c_i$. Условие 3 $\Rightarrow a_i = f(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}, S(x) \in C(x_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, i = \overline{1, n}$, или $f_i + b_i(x_{i-1}-x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1}-x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1}-x_i)^3 = f_{i-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_i h_i - \frac{c_i}{2} h_i^2 + \frac{d_i}{6} h_i^3 = f_i - f_{i-1}, i = \overline{1, n}. \quad (1) \quad \& S'(x) \in C(x_i) \Rightarrow S_i'(x_{i-1}) = S_{i-1}'(x_{i-1}) = b_{i-1}, i = \overline{2, n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_{i-1} \Leftrightarrow c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, i = \overline{2, n}. \quad (2) \quad S''(x) \in C(x_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_i''(x_{i-1}) = S_{i-1}''(x_{i-1}) = c_{i-1}, i = \overline{2, n} \Leftrightarrow d_i h_i = c_i - c_{i-1}, i = \overline{2, n}. \quad (3) \quad \text{Условие 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_i''(x_0) = S_i''(a) = c_i - d_i h_i = 0, \quad (4) \quad S_n''(x_n) = S_n''(b) = c_n = 0. \quad (5) \quad \text{Уточн., что } \exists n \text{ или}$

уравнений и $\exists n$ неизвестных b_i, c_i, d_i .

III. Рекуррентная система. (3.2.3)

Ввиду $c_0 = 0$ и рекуррентной (4) в виде, аналогичной (3): $d_1 h_1 = c_1 = c_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_i h_i = c_i - c_{i-1}, i = \overline{1, n}^{(6)}$. Тогда все d_i можно выразить реф $c_i - c_{i-1}$,
 а затем из (1) выразить b_i реф c_i и c_{i-1} . Подставив в (2),
 получим систему для c_i : $\frac{1}{3} c_{i-2} h_{i-1} + \frac{2}{3} c_{i-1} (h_{i-1} + h_i) + \frac{1}{3} c_i h_i = 2 \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}} \right)$,
 или $h_i c_{i-2} + 2(h_i + h_{i-1}) c_{i-1} + h_{i+1} c_i = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), i = \overline{1, n-1}$; при этом $c_0 = c_n = 0$.
 Для уравнений этой системы выполнено условие диагонального преобладания $\Rightarrow$
 в Lemma 3.1. Знач c_i , можно выразить $d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, b_i = \frac{1}{2} h_i c_i - \frac{1}{6} h_i^2 d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$.

Теорема доказана.

1. Задача о функции системы. (3.2.4) Система функций непрерывна

2. Сходимость и точность интерполирования сплайнами. (3.2.5)

Характеристики эффективности численного метода:

- Условие сходимости метода - по возможности минимальные ограничения, при которых приближённое решение сходится к точному.
- Скорость сходимости (точность) - характеристика близости приближённого решения к точному (хар-ка скорости убывания погрешности).

Рассмотрим $h = \max_{i \in \overline{1, n}} h_i$. Приведём без доказательства две теоремы.

Теорема 1 Пусть $f(x) \in C[a, b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall \text{ сетки с } h < \delta \mid |f(x) - S(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]$,
 т.е. $S_h(x)$ при $h \rightarrow 0$ равномерно сходится к $f(x) \in C[a, b]$.

Теорема 2 Пусть $f(x) \in C^4[a, b]$ и $f'(a) = f'(b) = 0$. Тогда
 $|f(x) - S(x)| \leq M_4 h^4, |f'(x) - S'(x)| \leq M_4 h^3, |f''(x) - S''(x)| \leq M_4 h^2 \quad \forall x \in [a, b]$,
 где $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

3.3
С.100-106
Л21-23

5. Метод наименьших квадратов.

Число узлов сетки достаточно велико, значения y_i определяются приближённо (ошибка замера).

Аналогично методу интерполирования, $F(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x), m < n$.

В каждой точке сетки погрешность $\delta_i = y_i - F(x_i) = y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i), i = \overline{0, n}$.

Суммарная квадратичная погрешность $J = \sum_{i=0}^n \delta_i^2$. Её хотим минимизировать.

поиск a_k . $J = J(a_0, \dots, a_m) \Rightarrow$ нужно найти экстремум функции нескольких

переменных. $J = \sum_{i=0}^n (y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i))^2 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=0}^n (y_i - \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x_i)) \varphi_k(x_i) = 0, k = \overline{0, m}$.

Оставим слева только a_k , назовём порядок суммирования:

$\sum_{k=0}^m \gamma_{ek} a_k = b_e, \quad e = \overline{0, m}, \quad \text{где} \quad \gamma_{ek} = \sum_{i=0}^n \varphi_e(x_i) \varphi_k(x_i), \quad b_e = \sum_{i=0}^n \varphi_e(x_i) y_i.$
 Получим СЛАУ с неизвестными $a_0, \dots, a_m$. Её матрица коэффициентов Γ — матрица Грама для системы функций $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ на сетке $x_0, \dots, x_n$.
 Она симметрична, т.к. $\gamma_{ek} = \gamma_{ke}$.
 Предположим, что $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$ таковы, что $\Delta = \det \Gamma \neq 0$. Тогда система имеет единственное решение $\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m$. Рассмотрим, кроме того, любой другой набор коэффициентов $a_0 = \bar{a}_0 + \Delta a_0, \dots, a_m = \bar{a}_m + \Delta a_m, (\Delta a_0)^2 + \dots + (\Delta a_m)^2 = 0$.
 Сравним $J(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m)$ и $J(a_0, \dots, a_m)$.

$$\begin{aligned}
 \delta_i^2 &= \left(y_i - \sum_{k=0}^m (\bar{a}_k + \Delta a_k) \varphi_k(x_i) \right)^2 = \left(\left(y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right) - \sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right)^2 = \\
 &= \left(y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right)^2 - 2 \left(y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right) \cdot \sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) + \left(\sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Просуммируем по i . Второе слагаемое — это $J(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Второе слагаемое:} \quad & -2 \sum_{i=0}^n \left(y_i - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \varphi_k(x_i) \right) \left(\sum_{k=0}^m \Delta a_k \varphi_k(x_i) \right) = \\
 & = -2 \sum_{k=0}^m \Delta a_k \left(\sum_{i=0}^n y_i \varphi_k(x_i) - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \varphi_k(x_i) \right) = -2 \sum_{k=0}^m \Delta a_k \left(b_k - \sum_{k=0}^m \bar{a}_k \gamma_{kk} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Третье слагаемое неотрицательно — $J(\bar{a}_0 + \Delta a_0, \dots, \bar{a}_m + \Delta a_m) \geq J(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_m)$.

6.2.3-4.2.2
 с. 109-110
 123-24

6. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Сходимость.

I. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона и их особенности. (4.2.1)

Отрезок $[a, b]$ разобьем на n равных отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$ точками $x_i = a + ih$.

Средние точки этих отрезков $\xi_i = a + (i - \frac{1}{2})h, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}$.

1. Формула прямоугольников. $P_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) h = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i). \quad I \approx P_n + d_n.$

2. Формула трапеций. Возьмем кусочно-линейную функцию

$$g_n(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} (x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_n(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_{i-1}) + f(x_i)). \quad T_n = \int_a^b g_n(x) dx = \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right).$$

$$I = T_n + \beta_n.$$

3. Формула Симпсона. и сетки, на концах отрезков строим кусочно-квадратичную

$$\text{функцию } g_n. \quad \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} g_n(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})).$$

$$S_n = \int_a^b g_n(x) dx = \frac{b-a}{3n} (f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)). \quad I = S_n + \gamma_n.$$

II. Сходимость и точность квадратурных формул прямоугольников, трапеций и Симпсона (4.2)

Покажем, что имеет место сходимость. Покажем, что P_n, T_n и S_n — итер. суммы.

1. Формула прямоугольников P_n — итер. сумма по определению.

2. Формула трапеций. Рассмотрим разбиение $[a, b]$ точками ξ_i .

На крайних отрезках $[a, \xi_1]$ и $[\xi_n, b]$ выберем крайние точки,

на остальных — $x_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$.

3. Формула Симпсона. В разбиении отрезок $[a, b]$ точками

$$\eta_{2j-1} = x_{2j-1} - \frac{2h}{3}, \quad \eta_{2j} = x_{2j-1} + \frac{2h}{3}, \quad j = \overline{1, \frac{n}{2}}; \quad \eta_0 = a, \quad \eta_{n+1} = b,$$

Отрезок $[a, \eta_1]$ и $[\eta_n, b]$ имеют длину $\frac{h}{3}$, отрезки с центром

$$\text{в } x_{2i} - \frac{2h}{3}, \text{ с центром в } x_{2i+1} - \frac{2h}{3}.$$

Сходимость показана.

45:12

4.2.2
с. 116-123
A25-26

7. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Исследование остаточных членов.

1. Формула прямоугольников. Предположим, что $f(x) \in C^2[a, b]$.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = f(\xi_i)h + \frac{h^3}{24} f''(\eta_i^*), \quad \eta_i^* \in [x_{i-1}, x_i]. \quad \alpha_n = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^*).$$

$$f''(x) \text{ непрерывна } \Rightarrow \text{ интегрируема } \xRightarrow{\text{итер. сумма}} \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^*) = \int_a^b f''(x) dx = f'(b) - f'(a).$$

$$\text{Тогда } \alpha_n = \frac{1}{n^2} (A + \mu_n), \text{ где } A = \frac{(b-a)^2}{24} (f'(b) - f'(a)),$$

$$\mu_n = \frac{(b-a)^2}{24} \left(h \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^*) - \int_a^b f''(x) dx \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \alpha_n \approx A n^{-2}.$$

$$\text{Или } \alpha_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \cdot \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^*) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta^*) \Rightarrow |\alpha_n| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}.$$

2. Формула трапеций. Предположим, что $f(x) \in C^2[a, b]$.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h - \frac{h^3}{12} f''(\eta_i^{**}), \quad \eta_i^{**} \in [x_{i-1}, x_i]. \quad \beta_n = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^{**}).$$

$$f''(x) \text{ непрерывна } \Rightarrow \text{ интегрируема } \xRightarrow{\text{итер. сумма}} \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^{**}) = \int_a^b f''(x) dx = f'(b) - f'(a).$$

$$\text{Тогда } \beta_n = \frac{1}{n^2} (B + \gamma_n), \text{ где } B = -\frac{(b-a)^2}{12} (f'(b) - f'(a)),$$

$$\gamma_n = -\frac{(b-a)^2}{12} \left(h \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^{**}) - \int_a^b f''(x) dx \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \beta_n \approx B n^{-2}.$$

$$\text{Или } \beta_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n f''(\eta_i^{**}) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta^{**}) \Rightarrow |\beta_n| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}.$$

Заметим, что если $f''(x) \geq 0$, то $P_n \leq I \leq T_n$.

3. Формула Симпсона. Пусть $f(x) \in C^4[a, b]$.

$$\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_j), \quad \eta_j \in [x_{2j-2}, x_{2j}].$$

$$\gamma_n = -\frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j). \quad f^{(4)}(x) \text{ непрерывна и интегрируема}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2h \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j) = \int_a^b f^{(4)}(x) dx = f^{(4)}(b) - f^{(4)}(a) \Rightarrow \gamma_n = \frac{1}{n^4} (C + \sigma_n),$$

$$C = -\frac{(b-a)^4}{180} (f^{(4)}(b) - f^{(4)}(a)), \quad \sigma_n = -\frac{(b-a)^4}{180} \left(2h \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j) - \int_a^b f^{(4)}(x) dx \right) \rightarrow 0.$$

$$\gamma_n \approx C n^{-4}. \quad \text{или } \gamma_n = -\frac{(b-a)^5}{180 n^4} f^{(4)}(\eta) \Rightarrow |\gamma_n| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 n^4}.$$

15-43

8. Аностерморная оценка погрешности и повышение точности квадратурных формул по результатам расчётов с разным шагом.

4.2.3
с.124-128
127-28

Аностерморная оценка погрешности — оценки, основанные на сопоставлении результатов вычисления с разным числом точек (может быть строго найден M_2).

1. Метод прямоугольников. Предположим, и точно и им приближенно $P_{n/2}$ и P_n . Тогда $I = P_{n/2} + \frac{4}{n^2} (A + \mu_{n/2})$, $I = P_n + \frac{4}{n^2} (A + \mu_n)$.

Возьмем второе равенство из первого: $(P_{n/2} - P_n) + \frac{3}{n^2} A + \frac{4}{n^2} (\mu_{n/2} - \mu_n) = 0$

$$\text{или } \alpha_n = \frac{1}{n^2} (A + \mu_n) = \frac{1}{3} (P_n - P_{n/2}) + \frac{4}{3n^2} (\mu_n - \mu_{n/2}) \Rightarrow \alpha_n \approx \frac{1}{3} (P_n - P_{n/2}).$$

2. Метод трапеций. Аналогично: $\beta_n = \frac{1}{3} (T_n - T_{n/2}) + \frac{4}{3n^2} (Q_n - Q_{n/2}) \approx \frac{1}{3} (T_n - T_{n/2})$.

3. Метод Симпсона. и точно и приближенно $I = S_{n/2} + \frac{16}{n^4} (C + \sigma_{n/2})$, $I = S_n + \frac{16}{n^4} (C + \sigma_n)$.

Возьмем второе из первого: $\gamma_n = \frac{1}{n^4} (C + \sigma_n) = \frac{1}{15} (S_n - S_{n/2}) + \frac{16}{15n^4} (\sigma_n - \sigma_{n/2}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \gamma_n \approx \frac{1}{15} (S_n - S_{n/2}).$$

Аностерморная оценка служит критерием для завершения вычисления после того, как нужная точность достигнута.

Можно подставить найденные выражения для остаточных членов в исходные квадратурные формулы: $I = \frac{4}{3} P_n - \frac{1}{3} P_{n/2} + \tilde{\alpha}_n$, $I = \frac{4}{3} T_n - \frac{1}{3} T_{n/2} + \tilde{\beta}_n$, $I = \frac{16}{15} S_n - \frac{1}{15} S_{n/2} + \tilde{\gamma}_n$,
где $\tilde{\alpha}_n = \frac{4}{3n^2} (\mu_n - \mu_{n/2}) = O(n^{-2})$, $\tilde{\beta}_n = \frac{4}{3n^2} (Q_n - Q_{n/2}) = O(n^{-2})$, $\tilde{\gamma}_n = \frac{16}{15n^4} (\sigma_n - \sigma_{n/2}) = O(n^{-4})$.

Эти формулы более точные.

16-33

9. Квадратурные формулы Гаусса.

I. Задача построения оптимальных квадратурных формул. (4.3.1)

Точность квадратурной формулы определяется выбором узлов и весовых коэффициентов.

Задача поиска наилучшей квадратурной формулы с заданным числом

узлов n : нужно построить квадратурную формулу с числом узлов n , которая является точной для любого полинома степени $2n-1$ или ниже.

Будем считать, что интеграл Гедвартинского упрощен к стандартной форме:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) + \delta_n, \quad x_i \in [-1, 1], \quad c_i - \text{веса}, \quad \delta_n - \text{остаточный член, который}$$

Q.D. равен нулю для любого полинома степени $2n-1$. Тогда последовательно

$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$, получаем: $\int_{-1}^1 x^m dx = \frac{1}{m+1} (1 + (-1)^{m+1}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i^m, \quad m = 0, 2n-1.$

Это $2n$ линейных уравнений с $2n$ неизвестными. Если $m=0$ получим $\sum_{i=1}^n c_i = 2.$

II. Полином Лежандра. (4.3.2)

Введем сюда вместо факторизованной более удобную систему нормировки.

Полином Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n.$ Свойства:

1) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x);$ 2) $P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n;$

3) $P_n(x)$ имеет на $(-1, 1)$ n простых корней, кроме того, все $P_n(x)$ являются симметричными относительно нуля; 4) любой полином $Q_m(x)$ степени $m < n$ ортогонален к $P_n(x)$ на $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) P_n(x) dx = 0.$$

Докажем эти свойства.

1) Очевидно.

2) $(x^2-1)^n = (x+1)^n (x-1)^n \Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 n! (x+1)^{n-k} (x-1)^k \Rightarrow \square.$

3) $(x^2-1)^n$ обращается в ± 1 в нуль $\Rightarrow$ по т. Руше ее первые производные должны иметь по крайней мере один нуль на $(-1, 1)$, кроме того, она также обращается в нуль в $\pm 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ имеет n корней на $(-1, 1)$; все эти корни простые. $\square$

4)
$$J = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 Q_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx = \frac{1}{2^n n!} \left(\underbrace{Q_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{dQ_m(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n dx \right).$$

Выводим индуктивное соотношение по разности $m+1 \leq n$ раз, получим:

$$J = (-1)^{m+1} \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} Q_m(x) \cdot \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (x^2-1)^n dx = 0. \quad \square.$$

Утв. $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n,$ т.е. полиномы Лежандра ортогональны на $[-1, 1]$.

Утв. Если $Q_n(x)$ - полином n -й степени, орт. на $[-1, 1]$ к любой полиному степени $m < n$.

Тогда с точностью до множителя он является полиномом Лежандра: $Q_n(x) = A_n P_n(x).$ (т.к. такие c -на определены однозначно)

III. Узлы и весовые коэффициенты квадратурных формул Гаусса. (4.3.3)

Рассмотрим полином $\omega_n(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$, где x_i — узлы узлы.
Возьмем произв. полином $Q_m(x)$, $m < n$, разделим его на $\omega_n(x)$ и представим по [1.1.1]. $m+n \leq 2n-1$ — ф-ла Гаусса 2.5. тогда: $\int_{-1}^1 Q_m(x) \omega_n(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i Q_m(x_i) \omega_n(x_i) = 0$.

$\omega_n(x)$ ортогонален любой полиному меньшей степени $\Rightarrow \omega_n(x) = A_n P_n(x)$.

Значит, узлы кв. ф-лы Гаусса являются корнями п. л. $P_n(x)$.

Рассмотрим полином $Q_{n-1,m}(x) = \frac{(x-x_1) \dots (x-x_n)}{(x_m-x_1) \dots (x_m-x_n)}$. $Q_{n-1,m}(x_i) = \delta_{im}$.

Для к-го кв. ф-лы Гаусса 2.5. тогда $\int_{-1}^1 Q_{n-1,m}(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i Q_{n-1,m}(x_i) = c_m$ — весовый коэффициент.

IV. Исследование квадратурной формулы (4.3.4)

Остается доказать, что построенная кв. ф-ла действительно будет точной для $\forall$ полинома степени $2n-1$ (или ниже).

Сначала покажем, что она точна для любого полинома $Q_{n-1}(x)$ ст. $n-1$.
 $Q_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^n Q_{n-1,m}(x_m) Q_{n-1,m}(x)$, так они совпадают в n точках. Тогда $\int_{-1}^1 Q_{n-1}(x) dx = \sum_{m=1}^n Q_{n-1}(x_m) \int_{-1}^1 Q_{n-1,m}(x) dx = \sum_{m=1}^n c_m Q_{n-1}(x_m)$.

Теперь покажем, что она будет точна для $Q_{2n-1}(x)$. Разделим его с остатком на $P_n(x)$: $Q_{2n-1}(x) = P_n(x) q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$. Тогда $\int_{-1}^1 Q_{2n-1}(x) dx = \int_{-1}^1 (P_n(x) q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)) dx = \int_{-1}^1 r_{n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i r_{n-1}(x_i) \stackrel{\text{по 2.5.1}}{=} \sum_{i=1}^n c_i (P_n(x_i) q_{n-1}(x_i) + r_{n-1}(x_i)) = \sum_{i=1}^n c_i Q_{2n-1}(x_i)$. Доказано.

1.3.2
с. 10-16
11-2

10. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Решаем невырожденную неоднородную систему линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{f}$.
Будем предполагать, что на каждом шаге $a_{ii} \neq 0$ (иначе меняем местами строки).

Разделим первую строку на a_{11} : $c_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \dots, c_{1n} = \frac{a_{1n}}{a_{11}}, y_1 = \frac{f_1}{a_{11}}$. Из каждой i -й строки вычтем первую, умноженную на a_{i1} $\Rightarrow$ в первой столбце останется только 1 в первой строке. Повторим действие, переходя к верхней треугольной матрице с единицами на главной диагонали. Из нее легко найдены все переменные.

Сложений и умножений $n(n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + 2 \cdot 1 = \frac{1}{2} n(n-1) \approx \frac{1}{2} n^2$ — всего операций $\frac{1}{2} n^2 + O(n^2)$.

Если $|c_{ij}| > 1$, то на обратном ходу накапливаются ошибки $\Rightarrow$ чтобы $|c_{ij}|$ было ≤ 1 , на каждом шаге в качестве ведущего выбираем максимальный по модулю элемент в строке.

1.1.3-1.1.4
с. 16-21
12-4

1.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей методом прогонки.

I. Системы с диагональным преобладанием. (1.1.3)

Def Назовём систему $A\vec{x} = \vec{f}$ системой с диагональным преобладанием по строке, если $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, i = \overline{1, n}$.

Теорема. Решение системы с диагональным преобладанием всегда $\exists!$.

До-во Рассмотрим себе однородную систему $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$ и покажем, что она имеет только тривиальное решение. Предположим, что она имеет нетривиальное решение $\vec{x}$, у которого k -я компонента — наибольшая по модулю: $|\bar{x}_k| > 0, |\bar{x}_k| \geq |\bar{x}_j|, j = \overline{1, n}$. Запишем k -е уравнение системы в виде $a_{kk}\bar{x}_k = -\sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}\bar{x}_j \Rightarrow |a_{kk}||\bar{x}_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}||\bar{x}_j| \leq |\bar{x}_k| \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \Leftrightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|$. Противоречие $\square$.

II. Системы с трёхдиагональной матрицей. Метод прогонки. (1.1.4)

Есть СЛАУ $A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i, i = \overline{1, n-1}, x_0 = q_0, x_n = q_n$.

Запишем первое и последнее уравнение: $C_1 x_1 + B_1 x_2 = F_1 - A_1 q_0,$

$A_{n-1} x_{n-2} + C_{n-1} x_{n-1} = F_{n-1} - B_{n-1} q_n$. Матрица полученной системы трёхдиагональна.

Предположим, что имеет место рекуррентное соотношение $x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = \overline{0, n-1}$.

α_{i+1} и β_{i+1} — искоемые прогоночные коэффициенты. Выразим x_{i+1} через x_{i+2} :

$x_{i+1} = \alpha_i x_i + \beta_i = \alpha_i (\alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i \Rightarrow (A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i) x_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0, i = \overline{1, n-1}$. Это соотношение будет заведано

выполняться, если выполняются $A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + C_i \alpha_{i+1} + B_i = 0, A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + C_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i}, \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i}, i = \overline{1, n-1}. x_0 = q_0, x_0 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \beta_1 = q_0$.

Найдём все α_i и β_i , используя рекуррентное условие $x_n = q_n$ и найдём все x_i .

Лемма. Если для СЛАУ с трёхдиагональной матрицей выполняется условие диагонального преобладания, то прогоночные коэффициенты удовлетворяют неравенствам $|\alpha_i| \leq 1$.

До-во проведём по индукции. База: $\alpha_1 = 0 \leq 1$. Шаг: допустим, $|\alpha_i| \leq 1, |\alpha_{i+1}| \leq 1$.

$|\alpha_{i+1}| = \left| \frac{B_i}{C_i + A_i \alpha_i} \right| \leq \frac{|B_i|}{|C_i| - |A_i|} \leq 1 \Rightarrow$ доказано $\square$

12. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений.

1.2
с. 21-30
14-5

I. Нормы матриц. (1.2.1)

Рассмотрим линейные вещественные евклидовы пр-во с заданными на нём скалярным и нормой.

Нормой матрицы назовём величину $\|A\| = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$. $\vec{x} = \|\vec{x}\| \vec{e} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| = \sup_{\|\vec{e}\|=1} \|A\vec{e}\|$. В конечномерном пр-ве норма матрицы ограничена, пр-вом на единичной сфере $\exists \vec{e}_0 \mid \|A\| = \|A\vec{e}_0\|$. Наконец, $\|A\vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$.

I. Корректность решения СЛАУ. (1.2.2)

Следует понимать, будем называть математическую задачу корректной, если решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Рассмотрим задачу

решения СЛАУ с ненулевым не равным нулю определителем $A\vec{x} = \vec{f}$. Решение $\vec{x} = A^{-1}\vec{f}$.

Пусть правая часть подвергнется возмущению $\Delta \vec{f}$ и стала равной $\tilde{\vec{f}} = \vec{f} + \Delta \vec{f}$. Тогда если $\tilde{\vec{x}}$ — решение возмущенной $A\tilde{\vec{x}} = \tilde{\vec{f}}$, то $\tilde{\vec{x}} = A^{-1}\tilde{\vec{f}} = A^{-1}\vec{f} + A^{-1}\Delta \vec{f} = \vec{x} + \Delta \vec{x}$, где $\Delta \vec{x} = A^{-1}\Delta \vec{f} \Rightarrow \|\Delta \vec{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta \vec{f}\| \Rightarrow \|\Delta \vec{x}\| \xrightarrow{\|\Delta \vec{f}\| \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$ наша задача корректна.

II. Число обусловленности матрицы. (1.2.3)

$\|\vec{f}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$, $\|\Delta \vec{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta \vec{f}\| \Rightarrow \|\vec{f}\| \cdot \|\Delta \vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\vec{x}\| \cdot \|\Delta \vec{f}\|$. Если $\|\vec{f}\| \neq 0$,

то $\frac{\|\Delta \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq M_A \frac{\|\Delta \vec{f}\|}{\|\vec{f}\|}$, где $M_A = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы A.

Чем больше M_A , тем сильнее деформируется решение на возмущение правой части (С-на линейная — более естественно оценивать относительную погрешность).

III. Оценка числа обусловленности. (1.2.4)

Лемма. $M_A \geq \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$.

Доказ. Пусть $\vec{y}$ — с.в. A, с.в. $\lambda_{\max} \Rightarrow |\lambda_{\max}| \|\vec{y}\| = \|A\vec{y}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{y}\| \xrightarrow{\|\vec{y}\| \neq 0} |\lambda_{\max}| \leq \|A\|$.

Аналогично, $A\vec{z} = \lambda_{\min}\vec{z} \Rightarrow A^{-1}\vec{z} = \frac{1}{\lambda_{\min}}\vec{z} \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_{\min}|} \leq \|A^{-1}\| \Rightarrow M_A \geq \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$. $\square$

Если матрица симметричная ($A = A^*$), то все её с.з. вещественны и $\|A\| = |\lambda_{\max}|$,

$\|A^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda_{\min}|} \Rightarrow$ для таких матриц $M_A = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$.

Из полученной оценки для M_A следуют два важных вывода: 1) $M_A \geq 1$ и 2) число обусловленности тем больше, тем больше разброс собственных значений матрицы.

13. Каноническая форма записи одношаговых итерационных методов. Достаточное условие сходимости.

I. Построение итерационных последовательностей. (1.3.1)

Последовательные приближения (итерации) функции $\vec{x}_k = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\}$,
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}$, т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}\| = 0$; $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Def $\vec{x}_{k+1} = F(\vec{x}_k, \vec{x}_{k-1}, \dots, \vec{x}_{k-m+1})$ — m-шаговый итерационный алгоритм,
 $\vec{x}_{k+1} = F(\vec{x}_k)$ — одношаговый итерационный алгоритм.

При обсуждении итер. методов функцию СЛАУ оформляем линейными одношаговыми алгоритмами, крме обычно записывают в стандартной канонической форме: $B_{k+1} \frac{\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k}{\tau_{k+1}} + A\vec{x}_k = \vec{f}$, $\det B_{k+1} \neq 0$, $\tau_{k+1} > 0$.
 B_{k+1} и τ_{k+1} — итерационные параметры. Если они не меняются в процессе итераций (не зависят от k), то итер. процесс называется стационарным.

Перепишем каноническую форму записи в виде $B_{k+1} \vec{x}_{k+1} = \vec{F}_{k+1}$,
где $\vec{F}_{k+1} = (B_{k+1} - \tau_{k+1} A) \vec{x}_k + \tau_{k+1} \vec{f}$. Видно, что построение очередной итерации сводится к решению СЛАУ.

Наиболее прост в реализации итер. процесс с единичной матрицей: $B_{k+1} = E$.
В этом случае очередная итерация явно выписывается рекуррентно: $\vec{x}_{k+1} = (E - \tau_{k+1} A) \vec{x}_k + \tau_{k+1} \vec{f}$.
У линейных методов можно выделить существенно легко реализуемые с диагональным и треугольным матрицами.

II. Проблема сходимости итерационного процесса. (1.3.2)

Для исследования с-ти итер. процесса введен две хрми: погрешность функции $\vec{z}_k = \vec{x}_k - \vec{x}$ и небукну уравнение $\vec{\psi}_k = A\vec{x}_k - \vec{f}$. Установим связь между ними:
 $\vec{\psi}_k = A\vec{x}_k - \vec{f} = A(\vec{z}_k + \vec{x}) - \vec{f} = A\vec{z}_k$ $\Leftrightarrow \vec{z}_k = A^{-1} \vec{\psi}_k$. $\|\vec{\psi}_k\| = \|A\| \cdot \|\vec{z}_k\|$, $\|\vec{z}_k\| = \|A^{-1}\| \cdot \|\vec{\psi}_k\|$.
Получается, что $\vec{z}_k \rightarrow 0 \Leftrightarrow \vec{\psi}_k \rightarrow 0$.

Сопряжённое преобразование A^* : $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A^*\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$.

Преобразование называется самосопряжённым, если $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$.

Описание сопряжённых преобразований в ортонорм базисе сводится к простым трансформациям:
 $a_{ij}^* = a_{ji} \quad \forall i, j = \overline{1, n}$.

- В дальнейшем будем опираться на следующие важные свойства самосопр. преобразований:
- все с.з. самосопр. или преобразование вещественны;
 - у самосопр. или преобразования формы Буняковского и с.в., в нем матрица преобразования принимает диагональный вид, причем на диагонали стоят все с.з.

Def Матрица или преобразование называется положит. определенной ($A > 0$), если $(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in E_n \setminus \{0\}$. В форм. Буняковского это означает $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall \vec{x} \in E_n \setminus \{0\}$.
 $A > 0$ с.з. матрицы λ_i и $a_{ii} > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

Будем считать $\vec{e}_i$ — с.в. A , λ_i — с.з., $\vec{x} = \sum_{i=1}^n z_i \vec{e}_i$.

Лемма 1 Симметричная матрица $A > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$.

D-во. $\Leftrightarrow (A\vec{e}_i, \vec{e}_i) = \lambda_i > 0$.

$\Leftrightarrow$ Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$. ^{Вспомогат. с.з.} $(A\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2 > 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0$. $\square$

Лемма 2 Пусть $A = A^* > 0$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$. Тогда $\lambda_n \|\vec{x}\|^2 \leq (A\vec{x}, \vec{x}) \leq \lambda_1 \|\vec{x}\|^2$.
 ^{$z_1^2 + \dots + z_n^2 = \|\vec{x}\|^2$ — из леммы 1}

Лемма 3. Если $A > 0$, то $\exists \delta > 0 \mid (A\vec{x}, \vec{x}) \geq \delta \|\vec{x}\|^2 \quad \forall \vec{x} \in E_n$.

D-во. Если $A = A^*$, то достаточно положить $\delta = \lambda_n$. В общем случае

$$A = \bar{A} + \tilde{A}, \text{ где } A^* = \bar{A} - \tilde{A}^* = -\tilde{A} \Rightarrow (A\vec{x}, \vec{x}) = (\bar{A}\vec{x}, \vec{x}) + (\tilde{A}\vec{x}, \vec{x}) =$$

$$- (\tilde{A}\vec{x}, \vec{x}) \Rightarrow (A\vec{x}, \vec{x}) \geq \lambda_n \|\vec{x}\|^2, \text{ где } \lambda_n > 0 \text{ — мин. с.з. матрицы}$$

$$\bar{A} = \frac{A + A^*}{2}. \quad \square$$

III. Достаточные условия сходимости итерационного процесса. (13.3)

Пусть B и τ не зависят от k .

Теорема Силарского. Пусть $A = A^*, A > 0, B - \frac{\tau}{2} A > 0, \tau > 0$.

Тогда для любого начального приближения $\vec{x}_0$ итер. процесс со-сх к решению иск. сист.

D-во. $B - \frac{\tau}{2} A > 0 \Leftrightarrow (B\vec{x}, \vec{x}) > \frac{\tau}{2} (A\vec{x}, \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in E_n \setminus \{0\}$. Отсюда следует,
 что $0 < \tau < \tau_0 = \inf_{\vec{x} \neq 0} \frac{2(B\vec{x}, \vec{x})}{(A\vec{x}, \vec{x})}$. $\vec{x}_k = \vec{z}_k + \vec{x}$ — подставим в канон.

форму: $B \frac{\vec{z}_{k+1} - \vec{z}_k}{\tau} + A\vec{z}_k = 0$. $B > 0 \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{z}_{k+1} = \vec{z}_k - \tau B^{-1} A \vec{z}_k = \vec{z}_k - \tau \vec{\omega}_k$, где $\vec{\omega}_k = B^{-1} A \vec{z}_k$, т.е. $A\vec{z}_k = B\vec{\omega}_k$.

Умножим на A слева: $A\vec{z}_{k+1} = A\vec{z}_k - \tau A\vec{\omega}_k$. Рассмотрим $J_k = (A\vec{z}_k, \vec{z}_k)$.

$J_{k+1} = (A\vec{z}_k - \tau A\vec{\omega}_k, \vec{z}_k - \tau \vec{\omega}_k) = (A\vec{z}_k, \vec{z}_k) - \tau (A\vec{\omega}_k, \vec{z}_k) - \tau (A\vec{z}_k, \vec{\omega}_k) + \tau^2 (A\vec{\omega}_k, \vec{\omega}_k)$.

$A\vec{z}_k = B\vec{\omega}_k$ и $A = A^* \Rightarrow (A\vec{\omega}_k, \vec{z}_k) = (A\vec{z}_k, \vec{\omega}_k) = (B\vec{\omega}_k, \vec{\omega}_k) \Rightarrow$

$\Rightarrow J_{k+1} = J_k - 2\tau (B\vec{\omega}_k, \vec{\omega}_k) + \tau^2 (A\vec{\omega}_k, \vec{\omega}_k) = J_k - 2\tau (B - \frac{\tau}{2} A) \vec{\omega}_k, \vec{\omega}_k \Rightarrow J_k \geq J_{k+1} \geq \dots > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ н-до $\{J_k\}$ сходится.

Согласно лемме 3, $((B - \frac{\tau}{2}A)\vec{w}_k, \vec{w}_k) \geq \delta \|\vec{w}_k\|^2$, где $\delta > 0$.

Тогда $J_k - J_{k+1} = 2\tau ((B - \frac{\tau}{2}A)\vec{w}_k, \vec{w}_k) \geq 2\tau \delta \|\vec{w}_k\|^2$. Значит, $\{J_k\}$ сходится $\Rightarrow \|\vec{w}_k\|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{z}_k = A^{-1}B\vec{w}_k \Rightarrow \|\vec{z}_k\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot \|\vec{w}_k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Доказано.

1.34
СЗБ-46
АВ-31

14. Метод простой итерации.

В этом методе $B=E$, τ не зависит от k : $\vec{x}_{k+1} = (E - \tau A)\vec{x}_k + \tau \vec{f}$. Будем считать, что A ф.г.н. у.т. Сильвестра, т.е. $A=A^* > 0$, тогда

$$\tau_0 = \inf_{\vec{x} \neq 0} \frac{2(\vec{x}, \vec{x})}{(A\vec{x}, \vec{x})} = \frac{2}{\sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{(A\vec{x}, \vec{x})}{(\vec{x}, \vec{x})}}.$$

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ — ортонормальный базис у с.б. A ,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0. \quad \vec{x} \neq 0, \quad \vec{x} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 + \dots + \xi_n \vec{e}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{x}, \vec{x}) = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2, \quad (A\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2, \quad \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{(A\vec{x}, \vec{x})}{(\vec{x}, \vec{x})} = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\lambda_1 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} = \lambda_1.$$

Уточн, $0 < \tau < \tau_0 = \frac{2}{\lambda_1}$.

Вследствие симметричности оператора $S = E - \tau A$, $S = S^* \Rightarrow \vec{x}_{k+1} = S\vec{x}_k + \tau \vec{f} \Rightarrow \vec{z}_{k+1} = S\vec{z}_k$.

Лемма 1. Пусть A имеет с.б. $\vec{e}_i$ с э.г. λ_i . Тогда S также имеет с.б. $\vec{e}_i$, но с э.г. $\mu_i(\tau) = 1 - \tau \lambda_i$.

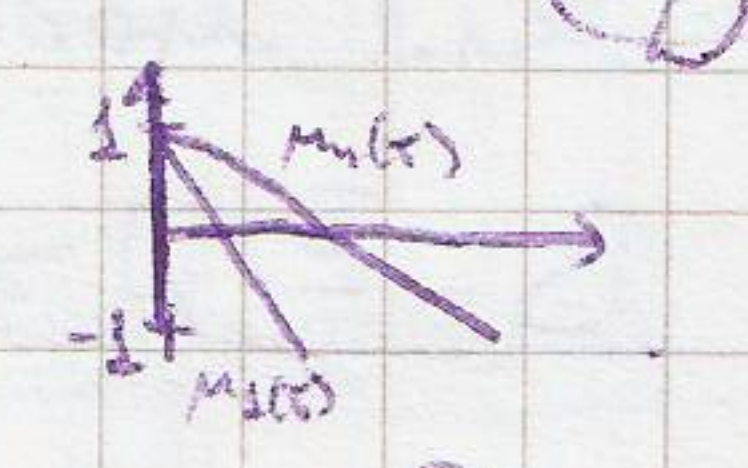
Докз. $S\vec{e}_i = (E - \tau A)\vec{e}_i = (1 - \tau \lambda_i)\vec{e}_i = \mu_i \vec{e}_i$. $\square$

$A=A^* \Rightarrow S=S^* \Rightarrow \|S\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i(\tau)|$.

Лемма 2. Метод простой итерации сходится $\forall$ нач. приближению $\Leftrightarrow |\mu_i(\tau)| < 1 \quad \forall i = 1, n$.

Докз. $\Leftrightarrow |\mu_i(\tau)| < 1 \quad \forall i \Rightarrow \|S\| < 1 \Rightarrow \|\vec{z}_{k+1}\| \leq \|S\| \cdot \|\vec{z}_k\| \leq \dots \leq \|S\|^{k+1} \|\vec{z}_0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

$\Leftrightarrow$ Неправильно, что $\exists j \mid |\mu_j| \geq 1$. Выберем $\vec{x}_0$ в виде $\vec{x}_0 = \vec{x} + \vec{e}_j$, где $\vec{x}$ — ф.г.н. с.у.т., а $\vec{e}_j = \vec{z}_0$ — с.б. S . Тогда $\vec{z}_k = S^k \vec{e}_j = \mu_j^k \vec{e}_j$, $\|\vec{z}_k\| = |\mu_j|^k \geq 1 \Rightarrow \|\vec{z}_k\| \not\rightarrow 0$. Доказано.

Теперь нужно установить диапазон τ , при котором $|\mu_i(\tau)| < 1$.  $\mu_1(\tau_0) = 1 - \tau_0 \lambda_1 = -1 \Rightarrow \tau_0 = \frac{2}{\lambda_1} \Rightarrow 0 < \tau < \tau_0 = \frac{2}{\lambda_1}$ — необходимо доказывать, но и необходимое условие сходности.

Ускорим скорость сходимости. Если процесс для $\vec{z}_{k+1}$ убывает со значением $q(\tau) = \|S\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i(\tau)|$. В точке $\frac{\tau_0}{2}$ $|\mu_1(\tau)|$ неестественно убывает и начинает расти. Найдем на $[\frac{\tau_0}{2}, \tau_0]$ точку τ^* , в которой $|\mu_n(\tau)| = \mu_n(\tau) = |\mu_1(\tau)| = -\mu_1(\tau)$: $1 - \tau^* \lambda_n = \tau^* \lambda_1 - 1 \Leftrightarrow \tau^* = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} < \tau_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|S\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i(\tau)| = \begin{cases} \mu_n(\tau), & 0 < \tau < \tau^*; \\ -\mu_1(\tau), & \tau^* \leq \tau < \tau_0. \end{cases} \quad \min \|S\| = 1 - \tau^* \lambda_n = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} = \frac{\kappa_A - 1}{\kappa_A + 1}$.

Видно, что для того чтобы быстрое схождение имело место при $\tau = \tau^*$ следует...

15. Методы Зейделя и верхней релаксации

I. Итерационные методы. Метод Зейделя. (13.5)

Рассмотрим квадратную матрицу A . Разложим её в сумму трёх матриц: $A = D + T_u + T_v$, где D — диагональная часть A , T_u — нижняя, T_v — верхняя треугольные.

В классическом методе Зейделя, записанном в канон. форме, полагают $B = D + T_u$,

$\tau = 1$. В результате итер. ф-ла принимает вид $(D + T_u)(\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k) + A\vec{x}_k = \vec{f}$

или $(D + T_u)\vec{x}_{k+1} + T_v\vec{x}_k = \vec{f}$. Преобразуем к нормальной форме записи:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{k+1} + a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \dots + a_{1n}x_n^k &= f_1; \\ a_{21}x_1^{k+1} + a_{22}x_2^{k+1} + a_{23}x_3^k + \dots + a_{2n}x_n^k &= f_2; \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1^{k+1} + a_{n2}x_2^{k+1} + a_{n3}x_3^{k+1} + \dots + a_{nn}x_n^{k+1} &= f_n. \end{aligned}$$

Тогда, как в описании метода Гаусса,

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Если A удовлетворяет т. Самарского, то $A > 0 \Rightarrow a_{ii} > 0 \Rightarrow a_{ii} \neq 0$

Утв. (без док-ва) Метод Зейделя сходится для любой с-мы, в крайн. А обл. св-вом диаг. преобладания. Сх-ты метода Зейделя в случае, когда $A = A^* > 0$, будет доказана далее.

II. Метод верхней релаксации. (13.6)

Модифицируем метод Зейделя. Введём параметр ω и запишем рекурр. соотнос:

$$(D + \omega T_u) \frac{\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k}{\omega} + A\vec{x}_k = \vec{f}. \quad \text{Здесь } B = D + \omega T_u, \quad \tau = \omega > 0. \quad (\omega = 1 \Rightarrow \text{метод Зейделя})$$

Перепишем соотношение: $(\frac{1}{\omega}D + T_u)(\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k) + A\vec{x}_k = \vec{f}$: ω влияет на диагональ B .

Ещё раз перепишем: $(\frac{1}{\omega}D + T_u)\vec{x}_{k+1} + ((1 - \frac{1}{\omega})D + T_v)\vec{x}_k = \vec{f} \Leftrightarrow \{ \text{покомпонентно расписать} \} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Исследуем условие сходимости метода в предположении, что A удовлетворяет

т. Самарского: $T_u^* = T_v$, $T_v^* = T_u \Rightarrow (T_u\vec{x}, \vec{x}) = (T_u^*\vec{x}, \vec{x}) = (T_v\vec{x}, \vec{x})$.

$$B - \frac{\tau}{2}A = (D + \omega T_u) - \frac{\omega}{2}(D + T_u + T_v) = (1 - \frac{\omega}{2})D + \frac{\omega}{2}(T_u - T_v). \quad \text{Тогда } B - \frac{\tau}{2}A > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((B - \frac{\tau}{2}A)\vec{x}, \vec{x}) > 0 \stackrel{T_u^* = T_v}{\Leftrightarrow} (1 - \frac{\omega}{2})(D\vec{x}, \vec{x}) > 0. \quad A > 0 \Rightarrow a_{ii} > 0 \Rightarrow (D\vec{x}, \vec{x}) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B - \frac{\tau}{2}A > 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < 2. \quad \text{Итак, метод верхней релаксации сх. при } 0 < \omega < 2.$$

Значит, и метод Зейделя тоже сходится.

Оптимальное $\omega = \omega^*$ существует и может быть выражено через $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$, но на практике их редко удается найти с достаточной точностью (как и τ^* в м.у.р.н.).

16. Разностная аппроксимация производных.

I. Сеточные функции. (5.1.1)

Пусть на $[a, b]$ задана равномерная сетка $a = x_0 < \dots < x_n = b$, $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{n}$, $i = \overline{0, n-1}$, и пусть каждой точке сетки сопоставлено число y_i . Совокупность этих чисел $\bar{y} = \{y_0, \dots, y_n\} = \{y_i\}$, $i = \overline{0, n}$ назовем сеточной функцией. Сеточные функции, определенные на данной сетке, образуют $(n+1)$ -мерное линейное пространство.

Чтобы можно было сравнивать сет. ф-ции, введем ^(норму) норму $\|\bar{y}\|_c = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i|$.

II. Разностная аппроксимация первой производной. (5.1.2)

Def. $L_h^+ [y_i] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$, $i = \overline{0, n-1}$ — правая разностная производная.

$L_h^- [y_i] = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$, $i = \overline{1, n}$ — левая разностная производная.

$L_h^{(0)} [y_i] = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$, $i = \overline{1, n-1}$ — центральная разностная производная.

Предположим, что на $[a, b]$ определена дифференцируемая ф-ция $y(x)$ | $y_i = y(x_i)$.

Попытка аппроксимации производной с помощью разностных отношений:

$$\psi_i^+ = L_h^+ [y_i] - y'(x_i), \quad \psi_i^- = L_h^- [y_i] - y'(x_i), \quad \psi_i^{(0)} = L_h^{(0)} [y_i] - y'(x_i).$$

Предположим, что $y(x) \in C^2[a, b]$, и запишем для нее ф-лу Тейлора с ост. членом в форме Лагранжа: $y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2} y''(x_i + \theta_i h) h^2$, $\theta_i \in [0, 1]$.

Подставим это разложение в ф-лу для ψ_i^+ и ψ_i^- : $\psi_i^+ = \frac{1}{2} y''(x_i + \theta_i h) h$,

$$\psi_i^- = -\frac{1}{2} y''(x_i - \theta_i h) h. \quad y''(x) \text{ непрерывна} \Rightarrow \text{ограничена} \Rightarrow \exists M_2 | y''(x) | \leq M_2 \quad \forall x \in [a, b].$$

Получим, что $|\psi_i^+| \leq \frac{1}{2} M_2 h$, $|\psi_i^-| \leq \frac{1}{2} M_2 h$.

Для оценки $\psi_i^{(0)}$ предположим, что $y(x) \in C^3[a, b]$. Определим ф-лу Тейлора

$$y_{i+1} = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2} y''(x_i)h^2 + \frac{1}{6} y'''(x_i + \theta_{1i} h) h^3, \quad y_{i-1} = y_i - y'(x_i)h + \frac{1}{2} y''(x_i)h^2 - \frac{1}{6} y'''(x_i - \theta_{2i} h) h^3.$$

Подставим в ф-лу для $\psi_i^{(0)}$: $\psi_i^{(0)} = \frac{1}{12} (y'''(x_i + \theta_{1i} h) + y'''(x_i - \theta_{2i} h)) h^2$.

$$|y'''(x)| \leq M_3 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow |\psi_i^{(0)}| \leq \frac{1}{6} M_3 h^2.$$

Таким образом, центр разностная ^{производная} аппроксимация дает более хорошие результаты (приближение).

III. Разностная аппроксимация второй производной. (5.1.3)

Здесь напомним $L_h [y_i] = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$. Предположим,

что на $[a, b]$ определена $y(x) \in C^2[a, b]$. $\psi_i = L_h [y_i] - y''(x_i)$, $i = \overline{1, n-1}$ — норм. аппр-ция.

Оценим величину погр-ти в предположении, что $y(x) \in C^4[a, b]$. Тогда $y_{i+1} = y(x_i + h) = y_i + y'(x_i)h + \frac{1}{2} y''(x_i)h^2 + \frac{1}{6} y'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24} y^{(4)}(x_i + \theta_{1i} h)h^4$, $y_{i-1} = y(x_i - h) = y_i - y'(x_i)h + \frac{1}{2} y''(x_i)h^2 - \frac{1}{6} y'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24} y^{(4)}(x_i - \theta_{2i} h)h^4$.

Подставим погрешность в уравнение для $L_h[y]$ и ψ , получим:

$$\psi_i = \frac{1}{24} (y^{(4)}(x_i + \theta_{1i}h) + y^{(4)}(x_i - \theta_{2i}h)) h^2. \quad y^{(4)}(x) \text{ непрерывна} \Rightarrow |y^{(4)}(x)| \leq M_4, \forall x \in [a, b].$$

$$\text{Тогда } |\psi_i| \leq \frac{1}{12} M_4 h^2.$$

Как оценить погрешность дифференциального уравнения $u(x)$ и функции сеточной функции y ?

Есть два способа либо от $\tilde{y}$ интерполированным перейти к $y(x)$, а затем оценить разность, например по норме C : $\|\tilde{z}\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - u(x)|$, либо непосредственно сеточную функцию $\tilde{u}$ и оценить разность сеточных функций $\tilde{u}$ и $\tilde{y}$:

$$\|\tilde{z}\|_C = \max_{0 \leq i \leq n} |y_i - u_i|. \quad \text{Первый способ более последовательный, второй — более простой.}$$

22:52

3:00

5.2.3.2.2
с. 450-451
A33-36

17. Метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши для ДУ 1-го порядка: $u' = f(x, u)$, $u(x_0) = u_0$.

Если $f(x, u)$ непрерывна и локально ограничена по u на отрезке (x_0, u_0) , то $\exists$ такой отрезок $[a, b]$, $a < x_0 < b$, на котором решение $z.k.$ $\exists$.

I. Метод Эйлера. (5.2.1)

Нужно численно построить решение $z.k.$ на отрезке $[x_0, x_0 + l]$. Возьмем n , введем шаг $h = \frac{l}{n}$ и образуем на отрезке сетку $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$. Составим $z.k.$ (1)(2)

$$\text{разностную задачу } \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad y_0 = u_0. \quad (3) - \text{разностное}$$

уравнение первого порядка, к которому применима схема Эйлера. Его можно переписать в виде разностного соотношения: $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$, $i = \overline{0, n-1}$. Такая разностная схема называется явной (можно записать).

С какой точностью расчит. сет. ф-ция $\{y_i\}$ дает решение $u(x)$ $z.k.$ $u(x)$?

Рассмотрим решение $z.k.$ (1)(2) в точках сетки: $\{u_i = u(x_i)\}$ и сравним найденную сет. ф-цию с $\{y_i\}$.

Образует две новые сет. ф-ции $\tilde{z}$ и $\tilde{\psi}$: $z_i = y_i - u_i$, $i = \overline{0, n}$ — погрешность решения,

$$\psi_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_i, u_i), \quad i = \overline{0, n-1} - \text{погрешность аппроксимации схемы к решению (характеризует}$$

степень близости дифференциального и разностного уравнений).

Устраняем связь между $\tilde{z}$ и $\tilde{\psi}$. $y_i = u_i + z_i$ — подст. в (3): $\frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = f(x_i, u_i + z_i)$

$$\text{или } \frac{z_{i+1} - z_i}{h} = (f(x_i, u_i + z_i) - f(x_i, u_i)) - \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(x_i, u_i) \right). \quad \text{По ф-ле Ларанжа } f(x_i, u_i + z_i) -$$

$$- f(x_i, u_i) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \theta_i z_i) z_i \Rightarrow z_{i+1} = (1 + h \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \theta_i z_i)) z_i - \psi_i h, \quad i = \overline{0, n-1} - \text{разност. соотн.}$$

нар. ун. $z_0 = 0$. Но вычислять нельзя, т.к. ψ_i, u_i и θ_i неизвестны. $\|\tilde{\psi}\|_C = \max_{0 \leq i \leq n-1} |\psi_i|$. Далее предположим,

$$\text{что } \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \text{ ограничено: } \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq C. \quad \text{Тогда } |1 + h \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \theta_i z_i)| \leq 1 + Ch \leq e^{Ch} = q, \quad q > 1.$$

Из формулы Эйлера следует рекуррентная $|z_{i+1}| \leq q|z_i| + \|\tilde{\psi}\|_C h$, порождая оценку: $z_0=0, |z_1| \leq \|\tilde{\psi}\|_C h, |z_2| \leq (1+q)\|\tilde{\psi}\|_C h, |z_3| \leq (1+q+q^2)\|\tilde{\psi}\|_C h, \dots, |z_n| \leq (1+q+\dots+q^{n-1})\|\tilde{\psi}\|_C h$.
 $q > 1 \Rightarrow 1+q+\dots+q^{n-1} < nq^{n-1} = ne^{chn} \Rightarrow |z_i| \leq ne^{chn} \|\tilde{\psi}\|_C, i=\overline{0,n} \Rightarrow \|\tilde{z}\|_C \leq Ce^{cl} \|\tilde{\psi}\|_C$.

Таким образом, чем выше порядок аппроксимации дифференциального, тем меньше погрешность.

Оценим теперь $\|\tilde{\psi}\|_C$. Предположим, что в явном виде $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны и ограничены.

Тогда $u''(x)$ непрерывна, т.е. $u''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, u) f'(x, u)$. Запишем для $u(x)$ формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа: $u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i + \theta_i h)h^2$.

Подставив во второе слагаемое ψ_i , получим: $\psi_i = \frac{1}{2}u''(x_i + \theta_i h)h^2$. $|u''(x)| \leq M_2, x \in [x_0, x_0 + l] \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|\tilde{\psi}\|_C \leq \frac{M_2}{2}h^2, \|\tilde{z}\|_C \leq \frac{M_2 l}{2}e^{cl}h$. Значит, при $h \rightarrow 0$ $\|\tilde{\psi}\|_C$ и $\|\tilde{z}\|_C \rightarrow 0$ со скоростью h^2 .

Потому метод Эйлера называют методом первого порядка по отношению к h .

II. Повышение точности Эйлера. (5.2.2)

Чтобы повысить точность метода, нужно улучшить аппроксимацию дифференциального уравнения.

Предположим, что решение ДУ $u(x)$ имеет производные достаточно высокого порядка, и запишем для него разложение по формуле Тейлора: $u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \dots$

Если его отбросить на более высоком порядке h и подставить в соответствии с ДУ $u'(x_i) = f(x_i, u_i)$, то получим сх. Эйлера.

Сделаем следующий шаг — отбросим разложение на более высоком порядке h^2 и выразим его формулу для $u''(x)$.

Получим $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)f(x_i, y_i))h^2$ ($u \rightarrow y$, т.е. для уравнения)

или $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)f(x_i, y_i))h$. Дополним условием $y_0 = y_0 \Rightarrow$

и получим схему Эйлера с погрешностью h^2 . Исследование показывает, что такая схема дает второй порядок точности от h как для $\tilde{\psi}$, так и для $\tilde{z}$. Можно ожидать, что

и получить соответствующую точность. Но здесь нужно учесть внимание не только $f(x_i, y_i)$, но и $\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)$

и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)$ — по мере того, как повышается порядок аппроксимации в явном виде, тем больше тех

величин, которые должны быть заданы.

Вспомогательные функции заданы.

5.2.3
с. 159-160
136-38

18. Метод Рунге — Кутты.

Рассмотрим разложение уравнения $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)f(x_i, y_i))h$.

Идея метода Рунге — Кутты — приближенно заменить ее на сумму значений функции f в двух разных точках с точностью до второго порядка h^2 . С этой целью рассмотрим

$f(x_i, y_0) + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_0)f(x_i, y_0))h = \beta f(x_0, y_0) + \alpha f(x_0 + \gamma h, y_0 + \delta h) + O(h^2)$. Подберем $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Разложим $f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h)$ по степеням h : $f(x_i + \gamma h, y_i + \delta h) = f(x_i, y_i) + \left(\gamma \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right) h + O(h^2)$.
 Подставим во формулу в правой ч.-у, найдем инфинитезимальный шаг h и δh : $\alpha + \beta = 1$,
 $\alpha \gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_i, y_i)$ $\Rightarrow \beta = 1 - \alpha$, $\gamma = \frac{1}{2\alpha}$, $\delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_i, y_i)$. Подставим в формулу, получим $O(h^2)$:
 $\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1 - \alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, y_i)\right)$ или $y_{i+1} = y_i + \left((1 - \alpha) f(x_i, y_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, y_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, y_i)\right) \right) h$.
 Наиболее удобная формула имеет вид $\alpha = 1$ и $\alpha = \frac{1}{2}$.

Для $\alpha = \frac{1}{2}$ найдем $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + f(x_i, y_i)))$. $\tilde{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h$ является
 по схеме Эйлера — явное представление функции $\Rightarrow$ такая схема называется «явный — коэффициент».

Для $\alpha = 1$ найдем $y_{i+1} = y_i + f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right) h$. Здесь шаг h по x — шаг h по y .
 неравновесный шаг $\frac{h}{2}$: $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$, затем находим $f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$.

Здесь на шаге f используем не один, а два шага, но зато метод более точный.

Введем вектор-функцию $\tilde{z} = \tilde{y} - \tilde{u}$ и вектор-функцию $\tilde{v}$. Введем также
 $\psi_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left((1 - \alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right) \right)$. $y_i = z_i + u_i$ — подст. в формуле:
 $\frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = (1 - \alpha) f(x_i, u_i + z_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + z_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i + z_i)\right)$. Искомое:
 $\frac{z_{i+1} - z_i}{h} = \left\{ \left((1 - \alpha) f(x_i, u_i + z_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + z_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i + z_i)\right) \right) - \left((1 - \alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right) \right) \right\} -$ (*)
 $- \left\{ \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \left((1 - \alpha) f(x_i, u_i) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right) \right) \right\}$. Рассмотрим функцию

$F(z) = (1 - \alpha) f(x_i, z) + \alpha f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, z + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, z)\right)$. Вспомогат. (*) имеет $F(u_i + z_i) - F(u_i) =$
 $= F'(u_i + \theta_i z_i) z_i$, $\theta_i \in (0, 1)$, где $F'(z) = (1 - \alpha) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, z) + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, z + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, z)\right) \left(1 + \frac{h}{2\alpha} \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, z)\right)$.

Подставим в (*): $z_{i+1} = (1 + h F'(u_i + \theta_i z_i)) z_i - \psi_i h$, $i = \overline{0, n-1}$, $u_n - z_0 = 0$. Непосредственно
 видно, что условия на функцию для брассованности $\tilde{z}$ имеют вид введем функцию $\tilde{v}$.

Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u)$ ограничена: $\left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right| \leq C$. Тогда (учитывая для $F'(z)$):

$|1 + h F'(u_i + \theta_i z_i)| \leq 1 + Ch + \frac{1}{2} C^2 h^2 \leq e^{Ch} = q$, $q > 1 \Rightarrow |z_{i+1}| \leq q |z_i| + \|\tilde{v}\|_C h \Rightarrow \{ \text{см. б. 1.7} \}$
 $\Rightarrow \|\tilde{z}\|_C \leq l e^{Cl} \|\tilde{v}\|_C$. Теперь нужно оценить норму вектора $\tilde{v}$ — $\|\tilde{v}\|_C$.

Предположим, что $f(x, u)$ имеет некие дополнительные условия $\Rightarrow u(x) \in C^3 \Rightarrow u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + u'(x_i) h +$
 $+\frac{1}{2} u''(x_i) h^2 + \frac{1}{6} u'''(\tilde{x}_i) h^3$, $f\left(x_i + \frac{h}{2\alpha}, u_i + \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)\right) = f(x_i, u_i) + \frac{h}{2\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, u_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i) f(x_i, u_i) \right) +$
 $+\frac{h^2}{8\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, u_i) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(x_i, u_i) f(x_i, u_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x_i, u_i) f^2(x_i, u_i) \right)$, где $\tilde{x}_i = x_i + \tilde{\theta}_i h$, $\tilde{x}_i = x_i + \tilde{\theta}_i \frac{h}{2\alpha}$,
 $\tilde{u}_i = u_i + \tilde{\theta}_i \frac{h}{2\alpha} f(x_i, u_i)$, $0 < \tilde{\theta}_i < 1$, $0 < \tilde{\theta}_i < 1$. Подставим эти формулы в формулу для ψ_i ,
 найдем ψ_i для $u'(x_i)$ и $u''(x_i)$: $\psi_i = h^2 \left\{ \frac{1}{6} u'''(\tilde{x}_i) - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tilde{x}_i, \tilde{u}_i) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(\tilde{x}_i, \tilde{u}_i) f(\tilde{x}_i, \tilde{u}_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(\tilde{x}_i, \tilde{u}_i) f^2(\tilde{x}_i, \tilde{u}_i) \right) \right\}$.

Вспомогат. б. (*) ограничена некоторым числом $M \Rightarrow |\psi_i| \leq \|\tilde{v}\|_C \leq M h^2 \Rightarrow \|\tilde{z}\|_C \leq M l e^{Cl} h^2$.

Т.о., формула Эйлера, найденная по схеме Рунге-Кутты, имеет порядок точности h^2 .

Наиболее рано при проведении реальных расчетов использовался схема Рунге-Куты 4-го порядка точности с коэффициентами: $\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3)$, где $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$, $k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2)$.

5.2.4
с. 168-174
138-39

19. Метод Рунге.

Пусть $u(x)$ — решение ДУ $u'(x) = f(x, u)$. Тогда $u'(x) = f(x, u(x)) = F(x)$ и $u_{i+1} = u_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x) dx$. Нужно как-то приближенно найти этот интеграл.

Пусть в уравнении $u'(x) = f(x, u)$ заданы начальные условия $u(x_i) = y_i$. В результате расчета найдем значения y_j и $f(x_j, y_j)$, $j = \overline{0, i}$. Возьмем некое фикс. число $m \leq i$ и построим интерполяционный многочлен $P_m(x)$, аппроксимирующий в точках x_j , $j = \overline{i-m, i}$ значение $f(x_j, y_j)$: $P_m(x_j) = f(x_j, y_j)$. Тогда формула Рунге $P_m(x) = \sum_{j=i-m}^i f(x_j, y_j) Q_{m,j}(x)$, где $Q_{m,j}(x) = \frac{(x-x_{i-m}) \dots (x-x_{i-1}) \dots (x-x_{i+1})}{(x_j-x_{i-m}) \dots (x_j-x_{i-1}) \dots (x_j-x_{i+1})}$. Идея метода Рунге: в формуле (x) $F(x) \approx P_m(x)$: $y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_m(x) dx = y_i + \sum_{j=i-m}^i a_j f(x_j, y_j)$, где $a_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} Q_{m,j}(x) dx$.

При $m=0$ $F(x) \approx P_0 = f(x_i, y_i)$ — получаем схему Эйлера.

Перейдем к исследованию варианта $m=1$ $P_1(x) = f(x_i, y_i) \frac{x-x_{i+1}}{h} + f(x_{i-1}, y_{i-1}) \frac{x-x_i}{h} \Rightarrow$

$y_{i+1} = y_i + (\frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})) h$. Заметим, что y_i находится в точности по формуле Эйлера. Предположим: $\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})$. Подставим в эту формулу схему Эйлера: $y_i = \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - (\frac{3}{2} f(x_i, u_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, u_{i-1})) = \frac{u_{i+1}-u_i}{h} - (\frac{3}{2} u'(x_i) - \frac{1}{2} u'(x_{i-1}))$. Предположим, что $f(x, u)$ имеет непрерывные производные $\Rightarrow u(x) \in C^3$. Тогда формула Тейлора:

$u_{i+1} = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2} u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6} u'''(x_i + \tilde{\theta}_i h)h^3$, $u'(x_{i-1}) = u'(x_i) - u''(x_i)h + \frac{1}{2} u'''(x_i - \tilde{\theta}_i h)h^2$. Подставим в формулу для ψ_i , найдем $\psi_i = (\frac{1}{6} u'''(x_i + \tilde{\theta}_i h) + \frac{1}{4} u'''(x_i - \tilde{\theta}_i h)) h^2 \Rightarrow$

$|\psi_i| \leq \|\tilde{\psi}\|_C \leq \frac{5}{12} M_3 h^2$, где $|u'''(x)| \leq M_3, \forall x \in [x_0, x_0+1]$. Итак, мы получили оценку погрешности. Заметим, что y_i тоже вычислено по формуле Эйлера с точностью $O(h^2)$. Поэтому 4-го порядка не нужна, см. с. 173-173.

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{55}{24} f(x_i, y_i) - \frac{59}{24} f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \frac{37}{24} f(x_{i-2}, y_{i-2}) - \frac{9}{24} f(x_{i-3}, y_{i-3}) \right)$$

20. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка и её разностная аппроксимация.

Рассмотрим следующую задачу для ДУ 2-го порядка: $u'' - q(x)u = -f(x)$, $x \in (a, b)$, $u(a) = u_1$, $u(b) = u_2$.
Эту задачу называют краевой. Пусть $f(x), q(x) \in C[a, b]$, при этом $q(x) \geq q_0 > 0$.
Тогда решение этой задачи $\exists!$.

Возьмём какое-то число n , введём шаг $h = \frac{b-a}{n}$ и построим сетку $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, n}$.
Запишем ДУ его разностным аналогом: $\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - q_i y_i = -f_i$, $i = \overline{1, n-1}$, $y_0 = u_1$, $y_n = u_2$.
Перепишем: $y_{i-1} - (2 + q_i h^2) y_i + y_{i+1} = -f_i h^2$, $i = \overline{1, n-1}$. Получим систему из $(n-1)$ уравнения с $(n-1)$ неизвестными y_i , $i = \overline{1, n-1}$. Это система линейных уравнений с единичным элементом.

С какой точностью сеточная функция $\{y_i\}$ приближается к решению краевой задачи? Пусть $u(x)$ — решение иск. краевой задачи. $u_i = u(x_i)$, введём $z_i = y_i - u_i$, $\psi_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - q_i u_i + f_i$.
 $y_0 = z_0 + u_0$ — подставим в разностное уравнение: $\frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - q_i z_i = -\left(\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - q_i u_i + f_i\right) = -\psi_i$.
 $z_0 = z_n = 0$. Решить $\{z_i\}$ нельзя, но можно оценить.

Пусть $\|\vec{z}\|_C = |z_j| \geq |z_i| \quad \forall i = \overline{0, n}$. $z_0 = z_n = 0 \Rightarrow j \neq 0, j \neq n$. Перепишем (*) для z_j :
 $(2 + q_j h^2) z_j = z_{j-1} + z_{j+1} + \psi_j h^2 \Rightarrow (2 + q_j h^2) |z_j| = (2 + q_j h^2) \|\vec{z}\|_C \leq |z_{j-1}| + |z_{j+1}| + |\psi_j| h^2 \leq$
 $\leq 2 \|\vec{z}\|_C + \|\vec{\psi}\|_C h^2 \Rightarrow \|\vec{z}\|_C \leq \frac{1}{q_0} \|\vec{\psi}\|_C$.

Для оценки $\vec{\psi}$ воспользуемся тем, что $f(x), q(x) \in C^2[a, b] \Rightarrow u(x) \in C^4[a, b] \Rightarrow$
 $u_{i-1} = u_i - u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 - \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(x_i - \tilde{\theta}_i h)h^4$, $u_{i+1} = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \frac{1}{24}u^{(4)}(x_i + \tilde{\theta}_i h)h^4$.
Подставим в формулу для ψ_i , получим $\psi_i = \frac{u''(x_i) - q_i u_i + f_i}{h^2} + \frac{h^2}{24} (u^{(4)}(x_i - \tilde{\theta}_i h) + u^{(4)}(x_i + \tilde{\theta}_i h))$.
 $u^{(4)}(x)$ непрерывна $\Rightarrow |u^{(4)}(x)| \leq M_4 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \|\vec{\psi}\|_C \leq \frac{M_4}{12} h^2$, $\|\vec{z}\|_C \leq \frac{M_4}{12q_0} h^2$.

Итак, если 2-й порядок аппроксимации уравнения $\Rightarrow$ второй порядок точности для краевой задачи.